

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ی اعداد

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ —مثال— $0, -\frac{2}{3}, -1/3$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = مجموعه‌ی اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

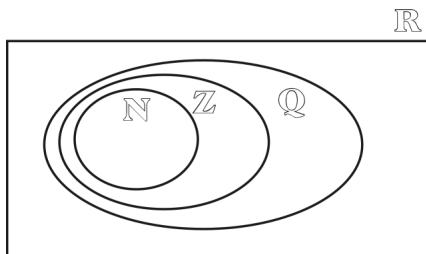
—مثال— $\sqrt{2} = 1/4142\dots$

هر نقطه روی محور اعداد، یک عدد حقیقی و هر عدد حقیقی، یک نقطه روی محور اعداد را نشان می‌دهد $\rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

(کتاب درسی - صفحه ۲ - کار در کلاس)

مثال ۱: اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.



$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

۲) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

۳) مجموعه‌ی $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

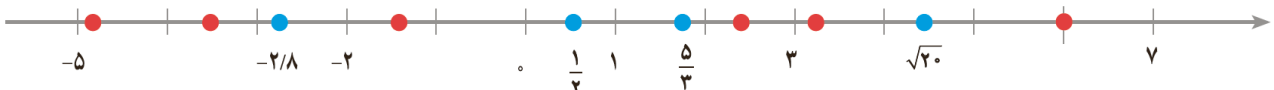
پاسخ:

مثال ۲: هر یک از اعداد داده‌شده را در یکی از جاهای مشخص‌شده روی محور بنویسید. اعداد گنگ را مشخص کنید.

(کتاب درسی - صفحه ۳ - کار در کلاس)

$$2/45, \frac{-7}{4}, 6, -4/9, \pi, -\sqrt{2}$$

پاسخ:



بازه‌ها

مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد است:



برای بیان این مجموعه از نماد ساده‌تر $[-2, 1]$ استفاده می‌کنیم و آن را بازه‌ی بسته از -2 تا 1 می‌نامیم. و اگر نقاط ابتدا و انتها را حذف کنیم، بازه‌ی $(-2, 1)$ به دست می‌آید و آن را بازه‌ی باز از -2 تا 1 می‌نامیم. بازه‌ی $(-2, 1]$ را هم بازه‌ی نیم‌باز می‌گوییم.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

اما بازه‌های دیگری هم داریم. فرض کنید بخواهیم $x > 2$ را نشان دهیم. برای این بازه‌ها از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌شود.

$x > 2$ نمایش بازه‌ای $(2, +\infty)$ $(-\infty, +\infty)$ اعداد حقیقی نیستند.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	

مثال ۳: اگر $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ ، بازه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید. (کتاب درسی - صفحه ۴ - مثال)

پاسخ:

تست ۴: چه تعداد از عبارتهای زیر نادرست است؟

(کتاب درسی - صفحه ۵ - کار در کلاس ۱)

الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$

ب) $-2 \in (-2, 0]$

پ) $0 \in (-2, 0]$

ت) $-2 \in \{-2, 0\}$

ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$

چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$

ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$

خ) $[2, 5) = (2, 5)$

د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

ذ) $6/0.22 \times 10^{22} \in [3, +\infty)$

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: () .

مثال ۵:

حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید.

(کتاب درسی - صفحه ۷ - تمرین ۴)

ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$

ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$

پاسخ:

تست ۶:

نمودار زیر بیانگر چند بازه می‌باشد، با اشتراک بازه‌های مربوطه، کدام یک از بازه‌های زیر را اجتماع کنیم، تا بازه جواب \mathbb{R} باشد؟

(تالیفی)



۲) $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

۱) $(-\infty, 1]$

۴) $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$

۳) $(2, +\infty)$

پاسخ: () .

تست ۷: در نمودار تست قبل، با اجتماع بازه‌های مربوطه، کدام یک از بازه‌های زیر را اشتراک کنیم، تا بازه جواب $[-۱, ۳]$ باشد؟

(تالیفی)

- (۱) $[-۱, ۲] \cap [۱, ۳]$ (۲) $[-\frac{1}{۲}, ۳] \cup [-\frac{1}{۲}, ۱]$ (۳) $[-۱, ۳]$ (۴) هر سه مورد

پاسخ: () .

(تالیفی)

تست ۸: اگر $A = [-۳, ۴]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x) \in A\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی $A - B$ کدام بازه‌ی زیر است؟

- (۱) $(۳, ۴)$ (۲) $(-۴, -۳)$ (۳) $(-۳, ۳)$ (۴) $(-۴, ۴)$

پاسخ: () .

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌هایی که نتوانیم تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کنیم، مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.

مثال ۹:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر از ۴ متناهی (مجموعه‌ی A) و مجموعه‌ی اعداد صحیح کم‌تر از ۴ نامتناهی است (مجموعه‌ی B).

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

توجه: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

مثال ۱۰:

وضعیت مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

(کتاب درس - صفحه ۶ - کار در کلاس)

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	۴ عضو دارد. $\{2, 3, 5, 7\}$
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	۷,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	۵۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		
مجموعه دانش‌آموزان مدرسه‌ی شما		✓	۲۷۰
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		✓	$10^9 - 10^8$
مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓	۳۹۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	✓		
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		
بازه $(0, 1)$	✓		
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	$6/02 \times 10^{23}$

مثال ۱):

(کتاب درسی - صفحه ۶ - کار در کلاس)

- ۱) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.
 ۲) دو مجموعه متناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

پاسخ:

مثال ۲):

(کتاب درسی - صفحه ۷ - کار در کلاس)

- الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید.
 ب) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟
 پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می‌توان گفت؟
 ث) اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه نامتناهی است. خواهد بود و اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعه نامتناهی است. است.

پاسخ:

مثال ۳):

(کتاب درسی - صفحه ۷ - تمرین ۱)

فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

- الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.
 ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
 پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.
 ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

پاسخ:

تست ۴):

چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی هستند؟

(کتاب درسی - صفحه ۷ - تمرین ۲)

- ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶
 ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

الف) مجموعه اعداد طبیعی

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ()

تست ۵: کدام مورد زیر نادرست است؟

(تالیفی)

(۱) $(a, a) = \emptyset$

(۲) $[a, a] = \{a\}$

(۳) هیچ دو مجموعه نامتناهی وجود ندارد که اشتراک آن‌ها تک عضوی باشد.

(۴) $\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

پاسخ: () .

تست ۶:

اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

(تالیفی)

(۱) $A - B$

(۲) $B - A$

(۳) $A \cap B$

(۴) $A - (A \cup B)$

پاسخ: () .

تست ۷:

اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ $(B \subseteq A)$

(تالیفی)

(۱) $A \cap B$

(۲) $B - A$

(۳) $A - B$

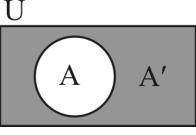
(۴) $(A - B) - A$

پاسخ: () .

درس دوم: متمم یک مجموعه

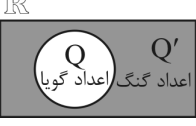
مجموعه مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.



$A \cup U = U$, $A \cap U = A$

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوایی از U است که در A نیستند.



مثال ۱۸:

$$A' = U - A = \{5, 7, 9\}$$

(۱) اگر $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $A = \{1, 3\}$ ، آن‌گاه:

$$A' = \mathbb{Z} - A = \mathbb{Z} - \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$$

(۲) اگر $U = \mathbb{Z}$ و $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$ ، آن‌گاه:

$$B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - (-3, 2] = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$

(۳) اگر $U = \mathbb{R}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$ ، آن‌گاه:

$$\mathbb{N}' = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

(۴) اگر $U = \mathbb{W}$ ، آن‌گاه:

$$\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N} \rightarrow \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

(۵) اگر $U = \mathbb{R}$ ، آن‌گاه:

(کتاب درسی - صفحه ۱۶ - تمرین ۱)

مثال ۱۹: \mathbb{R} مجموعه مرجع است. متمم این مجموعه‌ها را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3)$

ب) $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

پ) $C = (0, +\infty)$

ت) $D = (-\infty, 1]$

اگر U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه‌ی دلخواهی از آن باشد:

$$\begin{aligned} \phi' &= U & , & & U' &= \phi & , & & A \cup A' &= U & , & & A \cap A' &= \phi \\ A - A' &= A & , & & A' - A &= A' & , & & A - U &= \phi & , & & U - A &= A' \end{aligned}$$

(کتاب درسی - صفحه ۱۲ - تمرین ۲)

تست ۲۰: \mathbb{N} مجموعه مرجع است، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A وجود دارد که A' هم نامتناهی باشد.
 ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B وجود دارد که B' متناهی باشد.
 پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C وجود دارد که C' نامتناهی باشد.
 ت) مجموعه‌ای متناهی مثل D وجود دارد که D' متناهی باشد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: ()

وقتی مجموعه‌ی مرجع متناهی باشد، تمام مجموعه‌ها و متمم‌های آن‌ها نیز متناهی هستند. اما وقتی مجموعه‌ی مرجع نامتناهی باشد:

A' نامتناهی $\Rightarrow A$ متناهی
 وضعیت A' معلوم نیست. $\Rightarrow A$ نامتناهی

مثال ۲: فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس

(کتاب درسی - صفحه ۹ - کار در کلاس ۶)

جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A' = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B' = \{ \quad \quad \quad \}$$

$(A')'$			$\Rightarrow (A')' = A$
$\{1, 2, 3\}$			
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	$\Rightarrow \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	$\Rightarrow \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	
$A - B$	$A - (A \cap B)$	$A \cap B'$	$\Rightarrow \dots = \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	

جمع‌بندی:

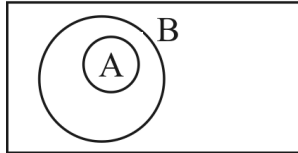
- ۱) $(A')' = A$
 ۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 ۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ } قوانین دمورگان

مثال ۲۲:

(کتاب درسی - صفحه ۱۰ - کار در کلاس ۷)

الف) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین B' و A' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است.

ب) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودار مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟



پاسخ:

جمع‌بندی:

اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه: $B' \subset A'$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

قبل از هر چیز به این مطلب دقت کنید:

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

$A \cap B = \emptyset$

به این مثال دقت کنید.

$A = \{1, 2, 5\}$
 $B = \{2, 4, 6\}$
 $\Rightarrow \begin{cases} A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\} \\ A \cap B = \{2\} \end{cases}$

اکنون به تعداد اعضای ۴ مجموعه زیر دقت می‌کنیم:

$n(A) = 3$ ، $n(B) = 3$ ، $n(A \cup B) = 5$ ، $n(A \cap B) = 1$

نتیجه:

اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 و اگر A و B مجزا باشند $(A \cap B = \emptyset)$: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(کتاب درسی - صفحه ۱۳ - تمرین ۳)

تست ۲۳: اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آن‌گاه $n(B)$ کدام است؟

۱۰ (۴)

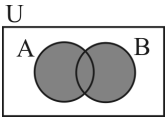
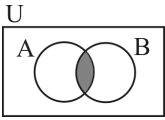
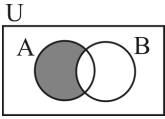
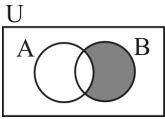
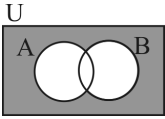

۱۵ (۳)

۲۵ (۲)

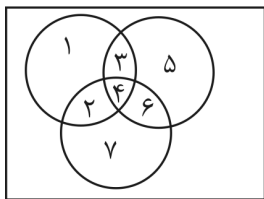
۳۰ (۱)

پاسخ: ()

یک تعبیر شهودی از مجموعه‌ها

یعنی عضوهایی که در A یا B یا در هر دوی آن‌ها است. (حداقل یا دست‌کم عضو یکی باشد).		$A \cup B$ (۱)
یعنی عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.		$A \cap B$ (۲)
یعنی عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند (فقط در A هستند).		$A - B = A \cap B'$ (۳)
یعنی عضوهایی که در B هستند ولی در A نیستند (فقط در B هستند).		$B - A = B \cap A'$ (۴)
یعنی عضوهایی که نه در A هستند و نه در B و نه در هر دوی آن‌ها (در هیچ‌کدام نیستند).		$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (۵)
یعنی عضوهایی که در A یا B یا هر دوی آن‌ها نیستند (حداقل یا دست‌کم عضو یکی نیستند).		$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (۶)

(تالیفی)

تست ۲۴: بر اساس نمودار و مقابل، مجموعه‌ی $(A \cap B') \cup (B - C)$ کدام است؟

{۱, ۲, ۶} (۲)

{۱, ۲, ۴, ۶} (۴)

{۱, ۲, ۳, ۴, ۶} (۱)

{۲, ۳, ۴, ۶} (۳)

پاسخ: ()

(تالیفی)

تست ۲۵: بر اساس نمودار و مطرح‌شده در تست قبل، $A - (B - C)$ کدام است؟

{۴} (۴)

{۳, ۴} (۳)

{۳} (۲)

{۳, ۵} (۱)

پاسخ: ()

مثال ۲۶: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ ، مطلوب است:

(کتاب درسی - صفحه ۱۳ - تمرین ۴)

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

پاسخ:

تست ۲۷: در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

(کتاب درسی - صفحه ۱۲ - کار در کلاس ۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

پاسخ: ()

مثال ۲۸: در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(کتاب درسی - صفحه ۱۳ - تمرین ۵)

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.
ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

پاسخ:

مثال ۲۹: در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. هم‌چنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(کتاب درسی - صفحه ۱۳ - تمرین ۶)

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

پاسخ:

تست ۳۰: اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

پاسخ: () .

(تالیفی)

۲۶ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

تست ۳۱: مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B ، کدام است؟

پاسخ: () .

(تالیفی)

۴۵ (۴)

۴۲ (۳)

۴۱ (۲)

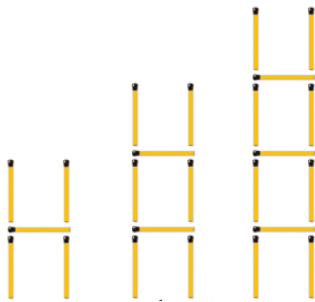
۴۰ (۱)

درس سوم: الگو و دنباله

الگو: ساختاری منظم از اشکال یا اعداد است و همه سعی ما پیدا کردن همین نظم می باشد که در نتیجه بتوانیم جمله عمومی الگو را به دست آوریم و از آنجا به تمام جملات آن الگو، دسترسی پیدا کنیم.

(کتاب درسی - صفحه ۱۴ - مثال)

مثال ۳۲: با توجه به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته جمله عمومی الگو را به دست آورید.



(جمله اول الگو) $a_1 = 5$

(بخوانید a اندیس ۱ برابر ۵)

(جمله دوم الگو) $a_2 = 8$

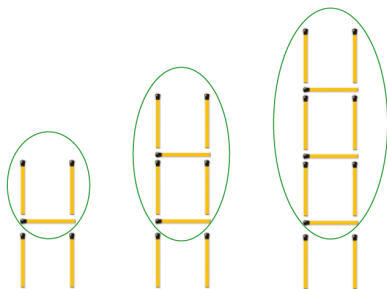
$a_3 = 11$

⋮

(جمله n ام الگو) $a_n = ?$

برای به دست آوردن a_n به سه روش رفتار می کنیم. ببینید:

روش اول:



$a_1 = 1(3) + 2$

$a_2 = 2(3) + 2$

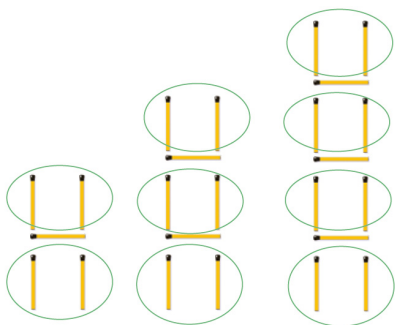
$a_3 = 3(3) + 2$

$a_4 = 4(3) + 2$

... \Rightarrow

$a_n = n \times 3 + 2 = 3n + 2$

روش دوم:



$a_1 = 1 + 2(2)$

$a_2 = 2 + 3(2)$

$a_3 = 3 + 4(2)$

$a_4 = 4 + 5(2)$

... \Rightarrow

$a_n = n + (n + 1) \times 2 = 3n + 2$

چوب های عمودی چوب های افقی

روش سوم: به جای تمرکز روی شکل ها، روی تعداد چوب کبریت ها متمرکز می شویم:

$a_1 = 5 = 5 + 0 \times 3$

$a_2 = 8 = 5 + 1 \times 3$

$a_3 = 11 = 5 + 2 \times 3$

⋮

$a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$

(کتاب درسی - صفحه ۱۵ - فعالیت ۶)

تست ۳۳: در الگوی مطرح شده در مثال قبل، تعداد چوب کبریت‌ها در چندمین شکل، ۷۷ است؟

- ۶۲ (۴)
 - ۶۴ (۳)
 - ۴۸ (۲)
 - ۲۵ (۱)
- پاسخ: () .

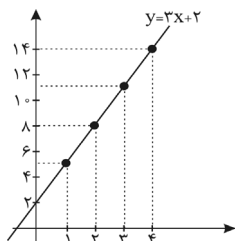
الگوی خطی

وقتی جمله عمومی یک الگو $t_n = an + b$ (a و b حقیقی و ثابت) باشد، الگو را خطی می‌نامیم. در این الگوها، اختلاف مقدار هر دو جمله متوالی ثابت و برابر a (ضریب n) است.
در الگوی خطی، نقاط (n, t_n) بر روی خط $y = ax + b$ قرار می‌گیرند.

مثلاً در الگوی اخیر (تعداد چوب کبریت‌ها) ببینید:

$5, 8, 11, \dots \Rightarrow$ اختلاف جملات = ۳ , $a_n = 3n + 2$

n	a _n	(n, a _n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)



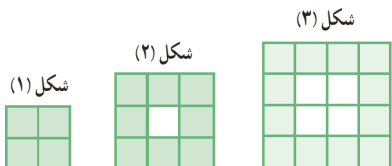
(کتاب درسی - صفحه ۱۶ - مثال)

تست ۳۴: در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ است. جمله بیستم این الگو کدام است؟

- ۸۱ (۴)
 - ۴۵ (۳)
 - ۳۳ (۲)
 - ۲۹ (۱)
- پاسخ: () .

(کتاب درسی - صفحه ۱۷ - کار در کلاس)

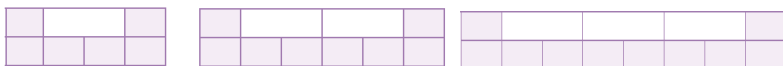
تست ۳۵: در الگوی زیر در چه مرحله‌ای تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟



- ۳۲ (۱)
 - ۳۶ (۲)
 - ۴۶ (۳)
 - ۱۱ (۴)
- پاسخ: () .

مثال ۳۶: به الگوی زیر توجه کنید.

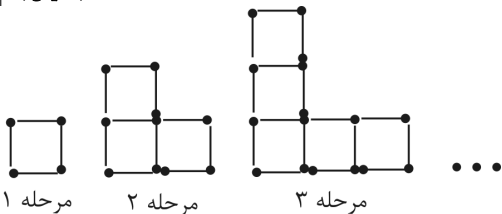
(کتاب درسی - صفحه ۲۰ - تمرین ۱)



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.
 ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.
 پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.
 ت) برای 100 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟
 ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل 50 کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند تاست؟
 پاسخ:

(تالیفی)

تست ۳۷: تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی دهم کدام است؟

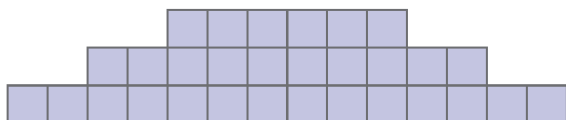


- ۵۸ (۱)
- ۶۴ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۷۶ (۴)

پاسخ: ()

(تالیفی)

تست ۳۸: در شکل، چیدمان صندلی‌ها در یک سالن تئاتر مشخص شده است. تعداد صندلی‌ها در ردیف هفتم چه قدر است؟



- ۲۰ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۵۰ (۴)

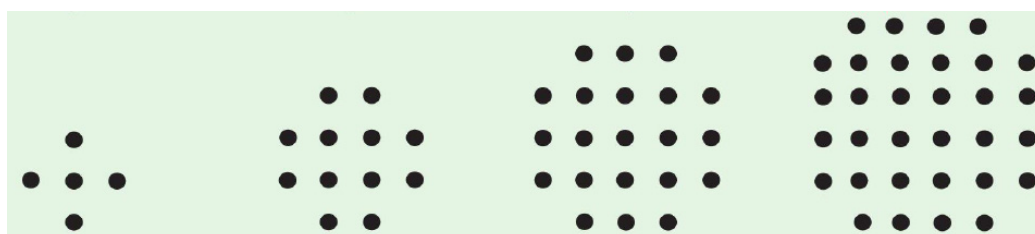
پاسخ: ()

الگوی غیرخطی: الگوهای هستند که اختلاف هر دو جمله متوالی آنها، مقدار ثابتی نیست.

در زیر نمونه‌هایی از این الگوها را با هم می‌بینیم:

(کتاب درسی - صفحه ۱۷ - فعالیت)

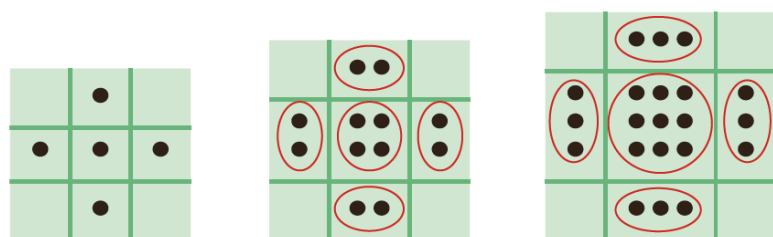
مثال ۳۹: با توجه به شکل‌های زیر، جمله‌ی عمومی الگو را به دست آورید.



$t_1 = 5$ $t_2 = 12$ $t_3 = 21$ $t_4 = 32$

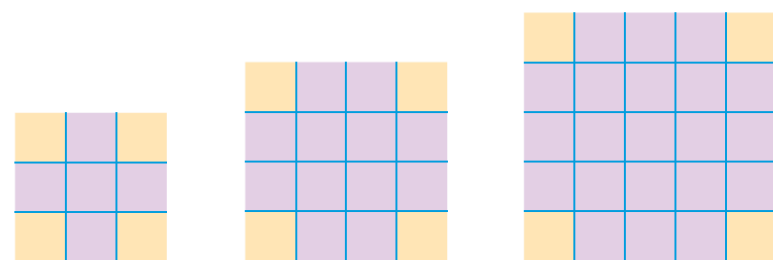
پاسخ: برای به دست آوردن t_n به سه روش رفتار می‌کنیم. ببینید:

روش اول:



$t_1 = (1)^2 + 4(1)$ $t_2 = (2)^2 + 4(2)$ $t_3 = (3)^2 + 4(3) \dots \Rightarrow a_n = n^2 + 4n$

روش دوم:



$t_1 = 3^2 - 4 = (1+2)^2 - 4$ $t_2 = 4^2 - 4 = (2+2)^2 - 4$ $t_3 = (3+2)^2 - 4 \dots \Rightarrow t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n$

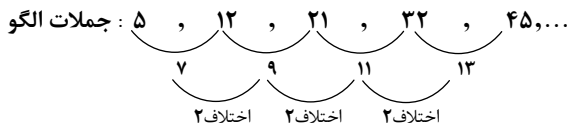
روش سوم: روی تعداد نقاط در هر مرحله متمرکز می‌شویم:

$t_1 = 5 = 1 \times (1+4)$
 $t_2 = 12 = 2 \times (2+3)$
 $t_3 = 21 = 3 \times (3+4)$
 \vdots
 $t_n = n(n+4) = n^2 + 4n$

مثال قبل یک الگوی درجه دوم بود.

هر الگو با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ را یک الگوی درجه دوم می‌نامیم. در این الگو اختلاف هر دو جمله متوالی، خود یک الگوی خطی تشکیل می‌دهد.

در مثال قبل:



(کتاب درسی - صفحه ۲۰ - تمرین ۲)

مثال ۴۰: الگوی زیر را در نظر بگیرید.

شکل (۱)



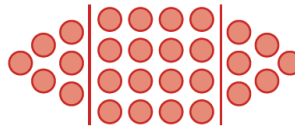
شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

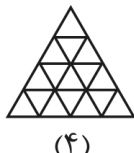
ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

پاسخ:

(تالیفی)

تست ۴۱: در الگوی هندسی زیر در کدام مرحله، ۸۱ مثلث داریم؟



۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

پاسخ: ()

تست ۴۲: با توجه به الگوی زیر، a_n کدام است؟

۵۰ (۱)

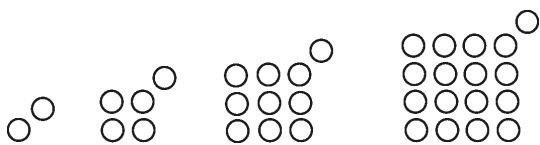
۴۲ (۲)

۳۷ (۳)

۳۹ (۴)

پاسخ: ()

(کالیفی)



دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شوند.

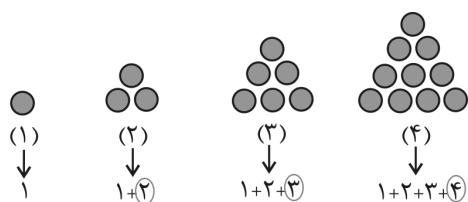
دو دنباله‌ی زیر بسیار معروف‌اند:

دنباله فیبوناچی : ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ...

دنباله مثلثی (صفحه ۱۹ - کار در کلاس ۴) : ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...

در دنباله‌ی مثلثی هر جمله، مساوی مجموع شماره همان جمله و اعداد طبیعی قبل از آن است. $(a_4 = 4 + (1 + 2 + 3) = 10)$

الگوی هندسی دنباله مثلثی به صورت زیر است:



در دنباله مثلثی جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال ۴۳:

برای دنباله‌های درجه‌ی دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

(کتاب درسی - صفحه ۲۰ - تمرین ۴)

الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

پاسخ:

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌های حسابی

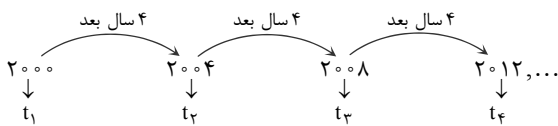
۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ...

سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است:

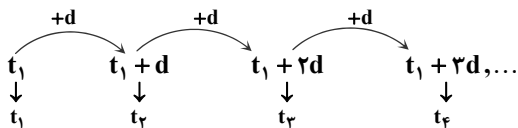
فرض کنید می‌خواهیم بدانیم بیست و چهارمین دوره المپیک در چه سالی برگزار خواهد شد؟

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند. (جمله اول را با t_1 و قدرنسبت را با d نمایش می‌دهیم).

اکنون دوباره به المپیک برمی‌گردیم:



و یا در حالت کلی‌تر:



و در نتیجه به طور کلی در یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d :

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

نکته: جمله عمومی یک دنباله حسابی، یک دنباله خطی و به صورت $a_n = a + bn$ است که ضریب n همان d است.

مثلاً: اگر $a_n = 20 + 4n$ جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، $d = 4$ است.

الآن به راحتی می‌توانیم به سؤال مطرح‌شده در ابتدای بحث پاسخ دهیم:

$$\text{بیست و چهارمین دوره المپیک در چه سالی برگزار می‌شود؟} \quad \begin{cases} t_n = t_1 + (n-1)d \\ t_1 = 2000, d = 4 \end{cases} \Rightarrow t_n = 2000 + 4(n-1)$$

$$\xrightarrow{n=24} t_{24} = 2000 + 4(24-1) = 2000 + 4 \times 23 = 2092$$

یعنی بیست و چهارمین دوره در سال ۲۰۹۲ برگزار می‌شود.

مثال ۴۶: در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله‌ی بعدی را می‌نویسیم و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست

(کتاب درسی - صفحه ۶۶ - کار در کلاس ۱)

می‌آوریم:

الف) ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ...

$$, d = 5, a_n = 5 + (n-1) \times 5 = 5n$$

ب) ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ...

$$, d = 2, b_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

پ) ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ...

$$, d = 4, c_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$$

ت) ۱۳, ۷, ۱, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳, ...

$$, d = -6, d_n = 13 + (n-1) \times (-6) = -6n + 19$$

در یک دنباله حسابی، اختلاف بین هر دو جمله یکسان است.

تست ۴۷: کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی نیست؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۱)

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \quad (۴)$$

$$۱, ۲, ۴, \dots \quad (۳)$$

$$۲, ۲, ۲, \dots \quad (۲)$$

$$\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, \dots \quad (۱)$$

پاسخ: ()

مثال ۴۸:

(کتاب درسی - صفحه ۲۳ - کار در کلاس ۱)

الف) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

ب) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله‌ی مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

پاسخ:

تست ۴۹:

در دنباله حسابی $۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, \dots$ جمله‌ی شانزدهم چه قدر است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۳ - مثال)

$$۱۰۹ \quad (۴)$$

$$۱۰۷ \quad (۳)$$

$$۱۰۵ \quad (۲)$$

$$۱۰۳ \quad (۱)$$

پاسخ: ()

تست ۵۰:

جمله‌ی چندم الگوی زیر ۳۹۷ است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۱۴)



$$۱۲۰ \quad (۱)$$

$$۹۸ \quad (۲)$$

$$۱۰۰ \quad (۳)$$

$$۱۱۰ \quad (۴)$$

پاسخ: ()

(کتاب درسی - صفحه ۲۲ - کار در کلاس ۲)

مثال ۵: A و B دو شرکت عرضه‌کننده سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند:

سیم‌کارت‌های شرکت B
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم‌کارت‌های شرکت A
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان‌دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه از طریق سیم‌کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید.

ب) به ازای ۸۰ دقیقه مکالمه، هزینه هر یک از سیم‌کارت‌ها چه قدر است؟

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آن‌ها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد

می‌کنید؟ چرا؟

پاسخ:

تست ۵۲: در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. در این دنباله جمله دهم چه قدر است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۲)

۵۶ (۴)

۶۴ (۳)

۷۲ (۲)

۸۳ (۱)

پاسخ: ()

تست ۵۳: در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. در این دنباله جمله اول چه قدر است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۳)

۳ (۴)

-۴ (۳)

-۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: ()

تست ۵۴: ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کرده‌ایم که سهم‌های دریافت‌شده، دنباله حسابی ساخته‌اند و هم‌چنین یک‌سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر شده است. بزرگ‌ترین سهم چه قدر است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۶)

۳۰ (۱) ۳۵ (۲) ۲۷ (۳) ۴۲ (۴)

پاسخ: ()

تست ۵۵: تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی عددی ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

(کتاب درسی - صفحه ۲۴ - تمرین ۶)

۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷/۵ (۳) ۳۸/۵ (۴)

پاسخ: ()

واسطه حسابی

اگر سه عدد a ، b و c تشکیل دنباله حسابی دهند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ و b را واسطه حسابی بین دو عدد a و c می‌گوییم.

مثلاً در اعداد ۳، ۷، ۱۱، عدد ۷ واسطه حسابی بین ۳ و ۱۱ است. زیرا $7 = \frac{3+11}{2}$ (عدد ۷ همان میانگین ۳ و ۱۱ است).

تست ۵۶: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان درج می‌کنیم که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. مجموع این سه واسطه حسابی چه قدر است؟

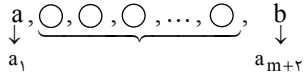
(کتاب درسی - صفحه ۲۳ - کار در کلاس ۶)

۹۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

پاسخ: ()

شاید برایتان جالب باشد!!!

اگر بین a و b ، m تا واسطه‌ی حسابی درج کنیم (یعنی m عدد به گونه‌ای قرار دهیم که این $m+2$ عدد (با احتساب a و b) تشکیل دنباله حسابی دهند)، قدرنسبت دنباله حاصل عبارت است از:



$$a_{m+2} = a_1 + (m+1)d \Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1}$$

مثال: بین 2° و 8° ابتدا یک واسطه حسابی، بعد دو واسطه و بعد سه واسطه درج می‌کنیم. ببینید:

$$2^\circ \quad \textcircled{5} \quad 8^\circ \rightarrow d = \frac{8^\circ - 2^\circ}{2} = 3^\circ$$

$$2^\circ \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{6} \quad 8^\circ \rightarrow d = \frac{8^\circ - 2^\circ}{3} = 2^\circ$$

$$2^\circ \quad \textcircled{35} \quad \textcircled{50} \quad \textcircled{65} \quad 8^\circ \rightarrow d = \frac{8^\circ - 2^\circ}{4} = 1.5^\circ$$

دنباله‌های هندسی

به دنباله زیر دقت کنید:

$$۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, \dots$$

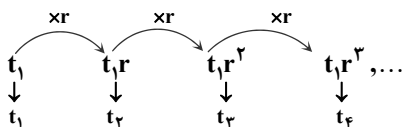
این دنباله یک دنباله‌ی حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{۳۲}{۱۶} = \frac{۱۶}{۸} = \frac{۸}{۴} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

این‌گونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. (جمله اول را با t_1 و قدرنسبت را با r نمایش می‌دهیم.)

در حالت کلی در یک دنباله هندسی داریم:



و در نتیجه به طور کلی در یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r :

جمله n ام دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد. ($t_1, r \neq 0$)

مثال ۵۷: در دنباله‌های هندسی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، دو جمله‌ی بعدی را می‌نویسیم و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست

می‌آوریم: (کتاب درسی - صفحه ۷۶ - کار در کلاس ۷)

الف) $۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \boxed{۱۶۲}, \boxed{۴۸۶}, \dots, a_n = ۲ \times ۳^{n-1}$

ب) $۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \boxed{۸۰}, \boxed{۱۶۰}, \dots, b_n = ۵ \times ۲^{n-1}$

پ) $۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \boxed{۶۰۰۰۰}, \boxed{-۶۰۰۰۰۰}, \dots, c_n = ۶ \times (-۱)^{n-1}$

ت) $۴, ۲, ۱, \boxed{\frac{۱}{۴}}, \boxed{\frac{۱}{۸}}, \dots, d_n = ۴ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-1} = ۲^2 \times \frac{۱}{۲^{n-1}} = \frac{۱}{۲^{n-3}}$

تست ۵۸: کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی نیست؟

(کتاب درسی - صفحه ۷۷ - تمرین ۱)

(۴) $۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \dots$

(۳) $۵, ۵, ۵, \dots$

(۲) $۷, ۲۸, ۱۱۲, \dots$

(۱) $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, \dots$

پاسخ: ()

تست ۵۹: چند دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟

(کتاب درسی - صفحه ۷۷ - تمرین ۷)

(۲) نامحدود

(۱) محدود

(۴) غیرقابل بررسی است.

(۳) تعداد بستگی به جمله اول آن دارد.

پاسخ: ()

(کتاب درسی - صفحه ۲۷ - تمرین ۳)

تست ۶۰: چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

ج) در دنباله‌های هندسی یا همگی جملات مثبت و یا همگی جملات منفی هستند.

۴) صفر

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

پاسخ: ()

تست ۶۱: جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ است. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟ (کتاب درسی - صفحه ۲۷ - تمرین ۴)

۴) ۱۵۳۶

۳) ۲۰۴۸

۲) ۷۶۸

۱) ۳۰۷۲

پاسخ: ()

(کتاب درسی - صفحه ۲۷ - تمرین ۵)

تست ۶۲: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله‌ی هندسی $2, 4, 8, \dots$ کدام است؟۴) 2^{210} ۳) 2^{105} ۲) 2^{420} ۱) 2^{460}

پاسخ: ()

تست ۶۳: علی دوچرخه‌ای را به قیمت A تومان خرید. فرض کنید دوچرخه دسته دوم، در هر سال 20% درصد نسبت به سال قبل از خودش

(کتاب درسی - صفحه ۲۷ - بر اساس تمرین ۴)

کاهش یابد. دوچرخه‌ی او ۵ سال بعد چه قیمتی خواهد داشت؟

۴) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 A$ ۳) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 A$ ۲) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 A$ ۱) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 A$

پاسخ: ()

تست ۶۴: بنابر آمار منتشرشده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده‌ی حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد:

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار							

(کتاب درسی - صفحه ۲۷ - تمرین ۷)

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

پاسخ: ()

واسطه هندسی

اگر سه عدد a ، b و c تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، آن‌گاه: $b^2 = ac$ و b را واسطه هندسی بین دو عدد a و c می‌گوییم.

(تالیفی)

مثال ۶۵: بین دو عدد ۳ و ۴۸ یک واسطه هندسی درج می‌کنیم. این واسطه بدین صورت به دست می‌آید:

(کتاب درسی - صفحه ۱۶ - کار در کلاس ۳)

مثال ۶۶: بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب‌ها یکتاست؟

پاسخ:

تست ۶۷: اگر a و b ، 2 و a سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $\frac{1}{2-b}$ و $\frac{1}{2-a}$ کدام است؟ (تالیفی)

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: ()